

FONCTIONS AFFINES

Objectif du chapitre :

- ⇒ Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.
- ⇒ Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.
- ⇒ Représenter graphiquement une fonction linéaire.
- ⇒ Connaître et utiliser la relation $y = ax$ entre les coordonnées $(x; y)$ d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \mapsto ax$.
- ⇒ Lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représentée par une droite.
- ⇒ Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.
- ⇒ Connaître et utiliser la relation $y = ax + b$ entre les coordonnées $(x; y)$ d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \mapsto ax + b$.
- ⇒ Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images.
- ⇒ Représenter graphiquement une fonction affine.
- ⇒ Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.
- ⇒ Déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère.

I) Fonctions Affines

Voici les tarifs d'entrée pour un stade de football :

Tarif 1 : 8€ l'entrée

Tarif 2 : 4€ l'entrée avec la carte demi-tarif qui coûte 40€

Tarif 3 : L'abonnement pour la saison qui coûte 92€

- 1) Calculer pour chaque tarif, la dépense pour 6 entrées, 11 entrées puis 15 entrées.
Dans chaque cas, quel est le tarif le plus intéressant ?
- 2) Soit x le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de x la dépense pour la saison pour chaque tarif.
- 3) a) Avec le tarif 2, calculer le prix dépensé pour 18 entrées.
b) Calculer de même : $f(2)$, $h(2)$, $g(4)$, $g(7)$ et $f(10)$.
c) Trouver x tel que $g(x) = 84$. Interpréter le résultat.
- 4) a) Pour chaque tarif, représenter sur un même graphique la dépense en fonction du nombre d'entrées.
b) Répondre en utilisant le graphique :
Dans quels cas vaut-il mieux choisir un tarif plutôt qu'un autre ?



- 1) Tarif le plus intéressant : **en vert**

x entrées	$x = 6$	$x = 11$	$x = 15$
Tarif 1	48 €	88 €	120 €
Tarif 2	64 €	84 €	100 €
Tarif 3	92 €	92 €	92 €

2) Tarif 1 : $8x$

A chaque nombre x , on associe le nombre $8x$,

On a défini une **FONCTION LINEAIRE** qu'on appelle f et on note :

$$f \mapsto 8x$$

$$\text{ou } f(x) = 8x$$

$f(x)$ se lit « f de x »

Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Tarif 2 : $4x + 40$

A chaque nombre x , on associe le nombre $4x + 40$,

On a défini une **FONCTION AFFINE** qu'on appelle g et on note :

$$g \mapsto 4x + 40$$

$$\text{ou } g(x) = 4x + 40$$

Tarif 3 : 92

A chaque nombre x , on associe le nombre 92,

On a défini une **FONCTION CONSTANTE** qu'on appelle h et on note :

$$h \mapsto 92$$

$$\text{ou } h(x) = 92$$

Définition

Soient a et b deux nombres fixés.

$x \mapsto ax + b$ est appelée **fonction affine**.

$x \mapsto ax$ est appelée **fonction linéaire**.

$x \mapsto b$ est appelée **fonction constante**.

Propriété

Une fonction linéaire est une fonction affine où $b = 0$.

3) a) $x = 18$

Calculons $g(18) = 4 \times 18 + 40 = 112$

Avec le tarif 2 : 18 entrées coûtent 112 €.

On dit que :

L'**image** de 18 par g est 112.

b) $f(2) = 8 \times 2 = 16$

$$h(2) = 92$$

$$g(4) = 4 \times 4 + 40 = 56$$

$$g(7) = 4 \times 7 + 40 = 68$$

$$f(10) = 8 \times 10 = 80$$

c) $g(x) = 84$

$$4x + 40 = 84$$

$$4x + 40 - 40 = 84 - 40$$

$$4x = 44$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{44}{4}$$

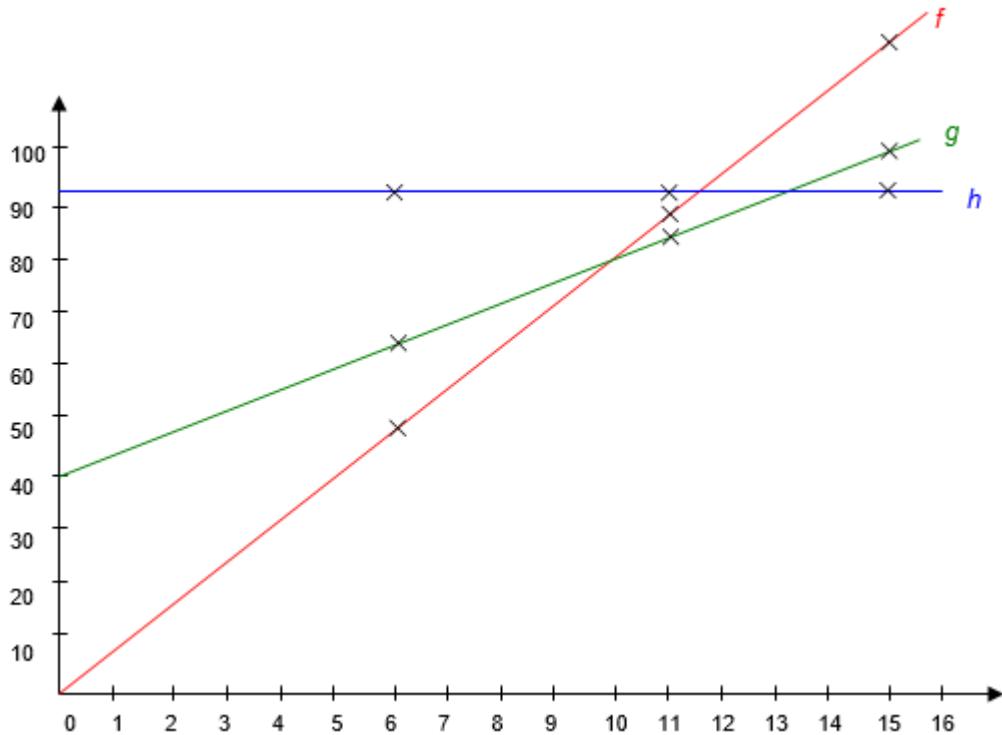
$$x = 11$$

Avec le tarif 2, 11 entrées coûtent 84 €.

II) Représentation graphique d'une fonction affine

1) Représentation graphique

Pour construire les représentations graphiques, on utilise le tableau de la question 1) du I). Si on ne dispose pas d'un tel tableau, il faut en faire.



Les représentations graphiques sont des droites.

Propriété

Toute **fonction affine** est représentée par une **droite**.

Une **fonction linéaire** est représentée par une **droite passant par l'origine**.

Une **fonction constante** est représentée par une **droite parallèle à l'axe des abscisses**.

Nous pouvons à présent répondre à la question 4) b).

Entre 0 et 10 entrées, il est plus avantageux d'opter pour le tarif 1, entre 10 et 13 entrées, le tarif 2 et au-delà de 13 entrées il faut choisir le tarif 3.

2) Fonctions affines et droites associées

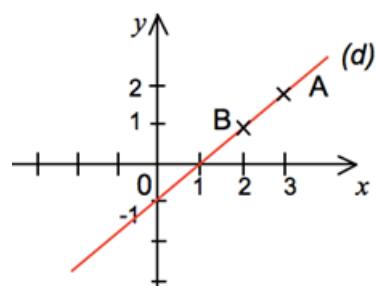
Exemple

Soit (d) la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = x - 1$.

Alors les coordonnées $(x; y)$ d'un point M appartenant à la droite (d) vérifient $y = x - 1$.

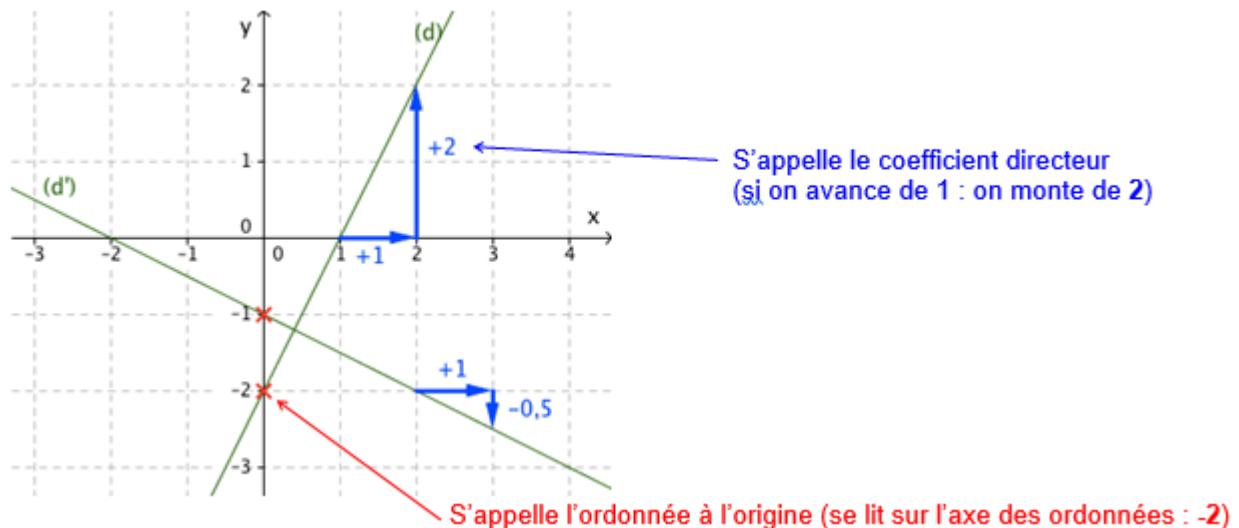
Les points $A(3 ; 2)$, $B(2 ; 1)$ et $C\left(\frac{9}{2} ; 1\right)$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

$$2 = 3 - 1 \text{ donc } A \in (d) \quad 1 = 2 - 1 \text{ donc } B \in (d) \quad 1 \neq \frac{9}{2} - 1 \text{ donc } C \notin (d)$$



Soit une fonction affine $f: x \mapsto ax + b$ représentée dans un repère par une droite d . Les coordonnées $(x; y)$ d'un point M appartenant à d vérifient $y = ax + b$.

3) Coefficient directeur et ordonnée à l'origine



Pour (d) , le coefficient directeur est 2 et l'ordonnée à l'origine est -2.

On retrouve ainsi la fonction f représentée par la droite (d) : $f(x) = 2x - 2$.

Pour (d') , le coefficient directeur est -0,5 et l'ordonnée à l'origine est -1.

On retrouve ainsi la fonction f représentée par la droite (d') : $f(x) = -0,5x - 1$.

Définition

La droite (d) représentant la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ a pour **coefficient directeur** a et pour **ordonnée à l'origine** b .

Remarques :

- Si le coefficient directeur est **positif** alors la droite « **monte** ». On dit qu'elle est **croissante**.
- Si le coefficient directeur est **négatif** alors la droite « **descend** ». On dit qu'elle est **décroissante**.

4) Accroissements

Propriété

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la droite (d) représentant la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Conséquence :

f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$.

Si x_1 et x_2 sont deux nombres tels que $x_1 \neq x_2$, alors : $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Exemple

On considère la fonction affine f telle que $f(2) = 3$ et $f(5) = 4$.

Le coefficient directeur de la droite représentative de f est égal à :

$$\frac{f(2) - f(5)}{2 - 5} = \frac{3 - 4}{2 - 5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} = a$$

On peut alors écrire :

$$f(x) = \frac{1}{3}x + b$$

Or $f(2) = 3$ donc $f(2) = \frac{1}{3} \times 2 + b = 3$

d'où $\frac{2}{3} + b = 3$ alors $b = \frac{7}{3}$.

On peut alors écrire :

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$