Chapitre 09 – FONCTIONS DÉRIVÉES

1) FONCTIONS DÉRIVÉES

a) Notion de fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Si, f est dérivable en tout réel a de I , on dit que **f est dérivable sur l'intervalle I.**

La fonction, qui à tout réel x de I, associe le nombre réel $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée de f.**

Cette fonction est notée $\boldsymbol{f'}$ et est définie sur I par $f' : x \longmapsto f'(x)$.

b) Fonctions dérivées de fonctions usuelles

On généralise

Fonction	f	Fonction dérivée f'	sur l'intervalle
constante	$f(x) = k$ avec k réel	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
affine	$f(x) = mx + p$ avec m et p réels	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
puissance	$f(x) = x^n$ avec $n \geq 2$ entier	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Démonstration pour la fonction carrée

On pose $f : x \longmapsto x^2$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$

Pour tout $a > 0$ et tout réel h non nul, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$

ainsi $\lim\limits_{h \to 0}(2a + h) = 2a$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Démonstration pour la fonction inverse

On pose $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Pour tout $a > 0$ et tout réel h non nul et distinct de $(-a)$, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{a-a-h}{ah(a+h)} = -\frac{1}{a^2+ah}$$

ainsi $\lim\limits_{h \to 0} -\frac{1}{a^2+ah} = -\frac{1}{a^2}$

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$

2) OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I et k un nombre réel constant.

a) Dérivée d'une somme

Propriété **Dérivée de $\boldsymbol{u+v}$**
La fonction somme $u+v$ définie sur I est dérivable sur I et on a : $\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$

Exemple

$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 + 5x - 4}$

est de la forme $u+v$ avec $u = 2x^3$ et $v = 5x - 4$

$u' = 2 \times 3x^2 = 6x^2$ $v' = 5$

Or $\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$ donc $f'(x) = 6x^2 + 5$

b) Dérivée d'un produit par une constante réelle

Propriété **Dérivée de $\boldsymbol{ku}$**
La fonction ku définie sur I est dérivable sur I et on a : $\boldsymbol{(ku)' = ku'}$

Exemple

$\boldsymbol{f(x) = x^5(2 - 3x)}$

est de la forme uv avec $u = x^5$ et $v = 2 - 3x$

$u' = 5x^4$ $v' = -3$

Or $\boldsymbol{(uv)' = u' + v'}$ donc $f'(x) = 6x^2 + 5$

c) Dérivée du produit de deux fonctions

Propriété **Dérivée de $\boldsymbol{uv}$**
La fonction $u\,v$ définie sur I est dérivable sur I et on a : $\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$

Exemple

$\boldsymbol{f(x) = x^5(2 - 3x)}$

est de la forme uv avec $u = x^5$ et $v = 2 - 3x$

$u' = 5x^4$ $v' = -3$

Or $\boldsymbol{(uv)' = u' + v'}$ donc $f'(x) = 6x^2 + 5$

d) Dérivée du quotient de deux fonctions

Propriété **Dérivée de $\boldsymbol{\frac{u}{v}}$**
La fonction $\frac{u}{v}$ définie sur I est dérivable sur I et v ne s'annulant pas sur I et on a : $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

Exemple :

$\boldsymbol{g(x) = \frac{2x-5}{x^2+5}}$

est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = 2x - 5$ et $v = x^2 + 5$

$u' = 2$ $v' = 2x$

Or $\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$ donc $f'(x) = \frac{2\times(x^2+5)-(2x-5)\times 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{2x^2+10-4x^2+10x}{(x^2+5)^2} = \frac{-2x^2+10x+10}{(x^2+5)^2}$

<u>Cas particulier :</u> dérivée de l'inverse d'une fonction

<u>Propriété</u> **Dérivée de $\frac{1}{v}$**

La fonction $\frac{1}{v}$ définie sur I est dérivable sur I ne s'annulant pas sur I et on a : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

<u>Démonstration</u> : il suffit d'appliquer la formule de la dérivée d'un quotient de deux fonctions avec u la fonction constante égale à 1. Alors : $u' = 0$. D'où : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{0\times v - 1\times v'}{v^2} = \frac{-v'}{v^2}$

<u>Exemple</u>

$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x^3-6}}$

est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v = x^3 - 6$

$v' = 3x^2$

Or $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ donc $f'(x) = \frac{2\times(x^2+5)-(2x-5)\times 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{2x^2+10-4x^2+10x}{(x^2+5)^2} = \frac{-2x^2+10x+10}{(x^2+5)^2}$

e) Dérivée de la fonction composée avec la fonction affine

Certaines fonctions ne peuvent pas être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles.

Une autre opération sur les fonctions existe : **la composition**.

<u>Exemple :</u> f est définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x+1}$

Pour calculer $f(x)$, on calcule d'abord $2x+1$ <u>puis</u> la racine carrée de ce réel.

f est l'enchaînement de deux fonctions :

$x \longmapsto 2x+1$ fonction affine positive sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ <u>suivie de</u> g définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $g(X) = \sqrt{X}$

On a : $f(x) = \sqrt{2x+1} = g(2x+1)$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{I} & \longrightarrow & \mathrm{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
x & \longrightarrow & 2x+1 & & \\
 & & \mathrm{X} & \longrightarrow & g(\mathrm{X}) \\
x & \longrightarrow & & \longrightarrow & g(2x+1)
\end{array}$$

<u>Propriété (admise)</u> **Dérivée de $\boldsymbol{g(ax+b)}$**

Si la fonction g est dérivable sur J, la fonction définie sur I par $x \longmapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I

et on a : $\boldsymbol{(g(ax+b))' = a \times g'(ax+b)}$

<u>Exemple</u>

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{2x+1}}$

est de la forme $g(2x+1)$ avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $ax+b = 2x+1$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad a = 2$

Or $\boldsymbol{(g(ax+b))' = a \times g'(ax+b)}$ donc $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES - DÉMONSTRATIONS

Démonstration 1

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

ainsi $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \quad = u'(a) + v'(a)$

Démonstration 2

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h} = \frac{k\times u(a+h)-k\times u(a)}{h} = k \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

ainsi $\lim\limits_{h\to 0} k \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \quad = ku'(a)$

Démonstration 3

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a+h)+u(a)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h}$$

$$= v(a+h) \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

ainsi $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \; = u'(a) \times v(a+h) + u(a) \times v'(a)$

Démonstration 4

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{u}{v}\right)(a)}{h} = \frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)}-\frac{u(a)}{v(a)}}{h} = \frac{u(a+h)\times v(a)-u(a)\times v(a+h)}{h\times v(a+h)\times v(a)} =$$

$$\frac{u(a+h)\times v(a)-u(a)\times v(a)+v(a)\times u(a)-u(a)\times v(a+h)}{h\times v(a+h)\times v(a)}$$

$$= \left(v(a) \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h} - u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right) \times \frac{1}{v(a+h)\times v(a)}$$

ainsi $\lim\limits_{h\to 0} \left(v(a) \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h} - u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right) \times \frac{1}{v(a+h)\times v(a)} \; = \frac{u'(a)\times v(a)-u(a)\times v'(a)}{(v(a))^2}$