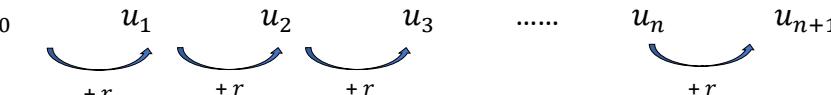
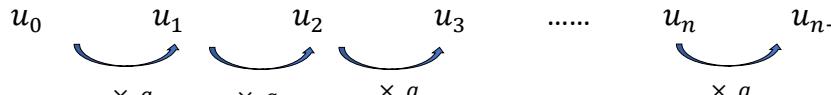


Chapitre 08 – Les suites particulières

	Suites Arithmétiques	Suites Géométriques
Relation de récurrence	 <p>On dit qu'une suite u est arithmétique si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre.</p> <p>On note pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + r$</p> <p>Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique u ; il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : $r = u_{n+1} - u_n$</p>	 <p>On dit qu'une suite u est géométrique si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en multipliant au précédent un même nombre.</p> <p>On note pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n \times q$</p> <p>Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique u ; il est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques : $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$</p>
Terme général	<p>Pour tout entier n : $u_n = u_0 + nr$ <i>PreuveA-1</i></p> <p>Plus généralement, pour tous entiers n et p : $u_n = u_p + (n - p)r$</p>	<p>Pour tout entier n : $u_n = u_0 \times q^n$ <i>PreuveG-1</i></p> <p>Plus généralement, pour tous entiers n et p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$</p>
Somme de termes consécutifs	<p>La somme des n premiers entiers non nuls est :</p> $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ <i>PreuveA-2</i> <p>D'où : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}$</p> $= \text{nbre de termes} \times \frac{\text{1er terme+dernier terme}}{2}$	<p>La somme des n premiers entiers non nuls est :</p> $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ <i>PreuveG-2</i> <p>D'où : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$</p> $= \text{1ier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

Preuves

PreuveA-1 : Par définition : $u_n = u_{n-1} + r = u_{n-2} + r + r = u_{n-3} + r + r + r + \dots = u_0 \underbrace{+r+r+r+\dots+r}_{n \text{ termes}} = u_0 + nr$

Plus généralement : $u_n = u_1 + (n - 1)r = u_2 + (n - 2)r = \dots = u_p + (n - p)r$ avec n et p entiers naturels tels que $n \geq p$.

PreuveG-1 : Par définition : $u_n = u_{n-1} \times q = u_{n-2} \times q \times q = u_{n-3} \times q \times q \times q \times q \dots = u_0 \underbrace{\times q \times q \times q \dots \times q}_{n \text{ facteurs}} = u_0 \times q^n$

Plus généralement : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = u_2 \times q^{n-2} = \dots = u_p \times q^{n-p}$ avec n et p entiers naturels tels que $n \geq p$.

PreuveA-2 : On ajoute la somme $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n$ à elle-même en l'écrivant dans les deux sens :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + n \\ n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + \dots & + & (n+1) & + (n+1) \end{array} \quad \text{cette somme possède } n \text{ termes égaux à } (n+1)$$

On en déduit que : $2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n \times (n + 1)$

Donc : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

PreuveG-2 : Notons : $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

Alors on a : $\left\{ \begin{array}{l} q \times S = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} \\ -S = -1 - q - q^2 - \dots - q^n \end{array} \right.$

Par addition des deux lignes, et après simplification terme à terme, on obtient : $q \times S - S = q^{n+1} - 1 \Leftrightarrow (q - 1) \times S = q^{n+1} - 1$

Donc $S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
