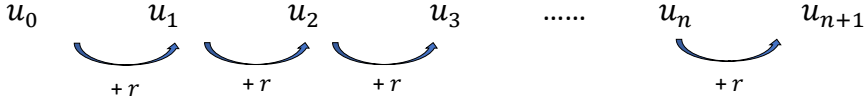
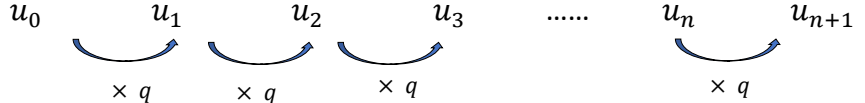


## Chapitre 08 – Les suites particulières

	Suites Arithmétiques	Suites Géométriques
Relation de récurrence	 <p>On dit qu'une suite <math>u</math> est <b>arithmétique</b> si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre.</p> <p>On note pour tout entier <math>n</math> : <math>u_{n+1} = u_n + r</math></p> <p>Le nombre <math>r</math> est appelé <b>raison</b> de la suite arithmétique <math>u</math> ; il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : <math>r = u_{n+1} - u_n</math></p>	 <p>On dit qu'une suite <math>u</math> est <b>géométrique</b> si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en multipliant au précédent un même nombre.</p> <p>On note pour tout entier <math>n</math> : <math>u_{n+1} = u_n \times q</math></p> <p>Le nombre <math>q</math> est appelé <b>raison</b> de la suite géométrique <math>u</math> ; il est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques : <math>q = \frac{u_{n+1}}{u_n}</math></p>
Terme général	<p>Pour tout entier <math>n</math> : <math>u_n = u_0 + nr</math> <span style="color: green;">PreuveA-1</span></p> <p>Plus généralement, pour tous entiers <math>n</math> et <math>p</math> : <math>u_n = u_p + (n - p)r</math></p>	<p>Pour tout entier <math>n</math> : <math>u_n = u_0 \times q^n</math> <span style="color: green;">PreuveG-1</span></p> <p>Plus généralement, pour tous entiers <math>n</math> et <math>p</math> : <math>u_n = u_p \times q^{n-p}</math></p>
Somme de termes consécutifs	<p>La somme des <math>n</math> premiers entiers non nuls est :</p> $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{PreuveA-2}$ <p>D'où : <math>u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}</math></p> $= \text{nbre de termes} \times \frac{\text{1ier terme} + \text{dernier terme}}{2}$	<p>La somme des <math>n</math> premiers entiers non nuls est :</p> $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{PreuveG-2}$ <p>D'où : <math>u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}</math></p> $= \text{1ier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

## Preuves

**PreuveA-1 :** Par définition :  $u_n = u_{n-1} + \mathbf{r} = u_{n-2} + \mathbf{r} + \mathbf{r} = u_{n-3} + \mathbf{r} + \mathbf{r} + \mathbf{r} \dots = u_0 + \underbrace{\mathbf{r} + \mathbf{r} + \mathbf{r} + \dots + \mathbf{r}}_{n \text{ termes}} = u_0 + \mathbf{n}\mathbf{r}$

Plus généralement :  $u_n = u_1 + (n-1)\mathbf{r} = u_2 + (n-2)\mathbf{r} = \dots = u_p + (n-p)\mathbf{r}$  avec  $n$  et  $p$  entiers naturels tels que  $n \geq p$ .

---

**PreuveG-1 :** Par définition :  $u_n = u_{n-1} \times \mathbf{q} = u_{n-2} \times \mathbf{q} \times \mathbf{q} = u_{n-3} \times \mathbf{q} \times \mathbf{q} \times \mathbf{q} \dots = u_0 \times \underbrace{\mathbf{q} \times \mathbf{q} \times \mathbf{q} \dots \times \mathbf{q}}_{n \text{ facteurs}} = u_0 \times \mathbf{q}^n$

Plus généralement :  $u_n = u_1 \times \mathbf{q}^{n-1} = u_2 \times \mathbf{q}^{n-2} = \dots = u_p \times \mathbf{q}^{n-p}$  avec  $n$  et  $p$  entiers naturels tels que  $n \geq p$ .

---

**PreuveA-2 :** On ajoute la somme  $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$  à elle-même en l'écrivant dans les deux sens :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & + & 2 & & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ n & & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & & \end{array} \quad \text{cette somme possède } n \text{ termes égaux à } (n+1)$$

On en déduit que :  $2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n \times (n+1)$

Donc :  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

---

**PreuveG-2 :** Notons :  $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

$$\text{Alors on a : } \begin{cases} q \times S = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} \\ -S = -1 - q - q^2 - \dots - q^n \end{cases}$$

Par addition des deux lignes, et après simplification terme à terme, on obtient :  $q \times S - S = q^{n+1} - 1 \Leftrightarrow (q-1) \times S = q^{n+1} - 1$

$$\text{Donc } S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

---