Chapitre 08 – Les suites particulières

	Suites Arithmétiques	Suites Géométriques
Relation de récurrence	$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \quad \ldots\ldots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$ On dit qu'une suite u est **arithmétique** si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre. On note pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \boldsymbol{r}$ Le nombre $\boldsymbol{r}$ est appelé **raison** de la suite arithmétique u ; il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : $\boldsymbol{r} = u_{n+1} - u_n$	$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \quad \ldots\ldots \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$ On dit qu'une suite u est **géométrique** si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en multipliant au précédent un même nombre. On note pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n \times \boldsymbol{q}$ Le nombre $\boldsymbol{q}$ est appelé **raison** de la suite géométrique u ; il est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques : $\boldsymbol{q} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$
Terme général	Pour tout entier n : $u_n = u_0 + n\boldsymbol{r}$ *PreuveA-1* Plus généralement, pour tous entiers n et p : $u_n = u_p + (n-p)\boldsymbol{r}$	Pour tout entier n : $u_n = u_0 \times \boldsymbol{q}^n$ *PreuveG-1* Plus généralement, pour tous entiers n et p : $u_n = u_p \times \boldsymbol{q}^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	La somme des n premiers entiers non nuls est : $$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$ *PreuveA-2* D'où : : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$ $= nbre\ de\ termes \times \frac{1ier\ terme + dernier\ terme}{2}$	La somme des n premiers entiers non nuls est : $$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$ *PreuveG-2* D'où : : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $= 1ier\ terme \times \frac{1-raison^{nbre\ de\ termes}}{1-raison}$

Preuves

PreuveA-1 : Par définition : $u_n = u_{n-1} + \boldsymbol{r} = u_{n-2} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} = u_{n-3} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \dots = u_0 \underbrace{+\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} + \cdots + \boldsymbol{r}}_{n \ termes} = u_0 + \boldsymbol{nr}$

Plus généralement : $u_n = u_1 + (n-1)\boldsymbol{r} = u_2 + (n-2)\boldsymbol{r} = \cdots = u_p + (n-p)\boldsymbol{r}$ avec n et p entiers naturels tels que $n \geq p$.

PreuveG-1 : Par définition : $u_n = u_{n-1} \times \boldsymbol{q} = u_{n-2} \times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} = u_{n-3} \times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} \dots = u_0 \underbrace{\times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q} \dots \times \boldsymbol{q}}_{n \ facteurs} = u_0 \times \boldsymbol{q^n}$

Plus généralement : $u_n = u_1 \times \boldsymbol{q^{n-1}} = u_2 \times \boldsymbol{q^{n-2}} = \cdots = u_p \times \boldsymbol{q^{n-p}}$ avec n et p entiers naturels tels que $n \geq p$.

PreuveA-2 : On ajoute la somme $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ à elle-même en l'écrivant dans les deux sens :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & + \ 2 & + & \dots + (n-1) & + n \\ n & + (n-1) + & & \dots + \quad 2 & + 1 \\ \hline (n+1) & + (n+1) + & \cdots & + (n+1) & + (n+1) \end{array}$$

cette somme possède n termes égaux à $(n+1)$

On en déduit que : $2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n \times (n+1)$

Donc : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

PreuveG-2 : Notons : $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

Alors on a : $\begin{cases} q \times S = \quad q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \ q^{n+1} \\ -S = -1 - q - q^2 - \cdots - q^n \end{cases}$

Par addition des deux lignes, et après simplification terme à terme, on obtient : $q \times S - S = q^{n+1} - 1 \Leftrightarrow (q-1) \times S = q^{n+1} - 1$

Donc $S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
