Chapitre 8. Limites d'une fonction et Continuité

Boulanger Yann

30 août 2025

Table des matières

1 Limites d'une fonction

1.1 Définitions

Définition - Limite en un point
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.
On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim_{x_0} f = \ell$.

Remarque

— L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in [\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$.

— On peut remplacer certaines inégalités strictes ń $<$ ż par des inégalités larges ń ż dans la définition : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon$

— Dans la définition de la limite

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

le quantificateur $\forall x \in I$ n'est là que pour être sûr que l'on puisse parler de $f(x)$. Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :

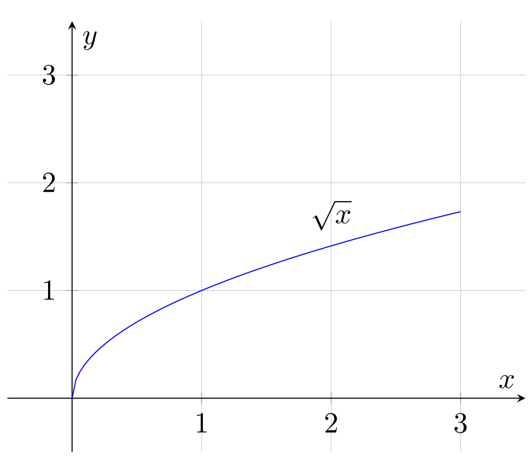
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

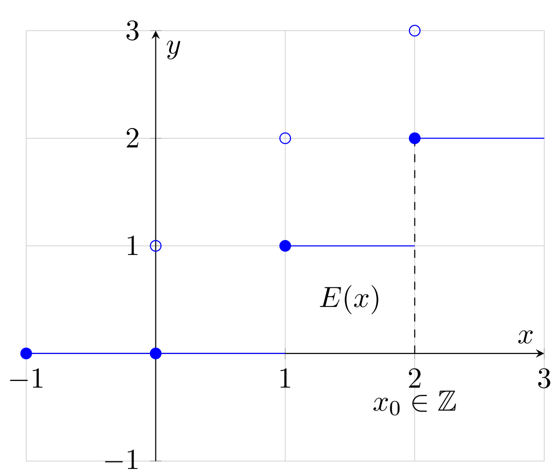
— N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$: le δ dépend en général du ϵ.
Pour marquer cette dépendance on peut écrire : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \ldots$

Exemples

— $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geq 0$,

— la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.





Définition
Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Définition - Limite en l'infini
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x\to+\infty} f = \ell$.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

Exemple
On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0.$$

Exemple
Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n > 0$
et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $b_m > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Définitions - Limite à gauche et à droite
Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

— On appelle **limite à droite** en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x\to x_0^+} f$.

— On définit de même la **limite à gauche** en x_0 de f : la limite de la fonction $f|_{]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x\to x_0^-} f$.

Remarque
On note aussi $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ pour la limite à gauche.

Définition
Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

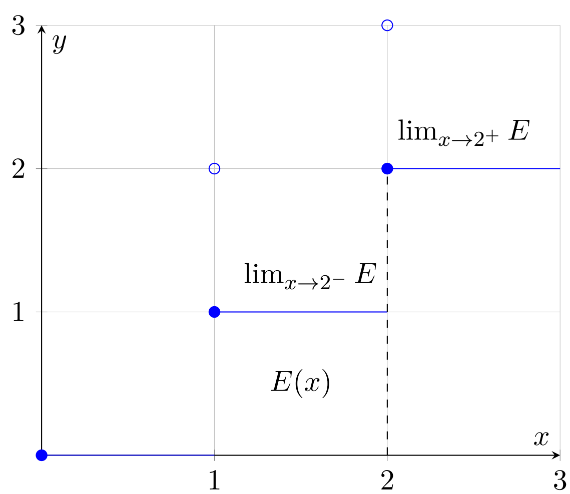
Si la fonction f a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent $\lim_{x\to x_0} f$.
Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ (si f est bien définie en x_0) alors f admet une limite en x_0.

Exemple
Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

— comme pour tout $x \in [2, 3]$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim_{x\to 2^+} E = 2$,

— comme pour tout $x \in [1, 2]$ on a $E(x) = 1$, on a $\lim_{x\to 2^-} E = 1$.

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.



1.2 Propriétés

Proposition
Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Proposition
Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.
Si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

— $\lim_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

— $\lim_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$

— $\lim_{x_0}(f \times g) = \ell \times \ell'$

— si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$. Plus particulièrement, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

Cette proposition se montre de manière similaire à la proposition analogue sur les limites de suites. Nous n'allons donc pas donner la démonstration de tous les résultats.

Démonstration
Montrons par exemple que si f tend en x_0 vers une limite ℓ non nulle, alors $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0 et tend vers $\frac{1}{\ell}$.
Supposons $\ell > 0$, le cas $\ell < 0$ se montrerait de la même manière. Montrons tout d'abord que $\frac{1}{f}$ est bien définie et est bornée dans un voisinage de x_0 contenu dans l'intervalle I.
Par hypothèse

$$\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \ell - \epsilon' < f(x) < \ell + \epsilon'.$$

Si on choisit ϵ' tel que $0 < \epsilon' < \ell/2$, alors on voit qu'il existe un intervalle $J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, $f(x) > \ell/2 > 0$, c'est-à-dire, en posant $M = 2/\ell$:

$$\forall x \in J \quad 0 < \frac{1}{f(x)} < M.$$

Fixons à présent $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in J$, on a

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - f(x)}{\ell}\right| < \frac{M}{\ell}|\ell - f(x)|.$$

Donc, si dans la définition précédente de la limite de f en x_0 on choisit $\epsilon' = \frac{\ell\epsilon}{M}$, alors on trouve qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in J \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{M}{\ell}|\ell - f(x)| < \frac{M}{\ell}\epsilon' = \epsilon.$$

Proposition
Si $\lim_{x_0} f = \ell$ et $\lim_t g = \ell'$, alors $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$.

Ce sont des propriétés que l'on utilise sans s'en apercevoir !

Exemple
Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \to 2$ lorsque $x \to x_0$. Posons $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{u(x)} + \ln u(x)}$.
Si elle existe, quelle est la limite de f en x_0 ?

— Tout d'abord comme $u(x) \to 2$ alors $u(x)^2 \to 4$ donc $\frac{1}{u(x)^2} \to \frac{1}{4}$ (lorsque $x \to x_0$).
— De même comme $u(x) \to 2$ alors, dans un voisinage de x_0, $u(x) > 0$ donc $\ln u(x)$ est bien définie dans ce voisinage et de plus $\ln u(x) \to \ln 2$ (lorsque $x \to x_0$).
— Cela entraîne que $1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \to 1 + \frac{1}{4} + \ln 2$ lorsque $x \to x_0$. En particulier $1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x) \geq 0$ dans un voisinage de x_0, donc $f(x)$ est bien définie dans un voisinage de x_0.
— Et par composition avec la racine carrée alors $f(x)$ a bien une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}$.

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites.
Par exemple si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de $f + g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée.
Voici une liste de formes indéterminées : $+\infty - \infty; 0 \times \infty; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; 1^{\infty}; \infty^0$.

Voici une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

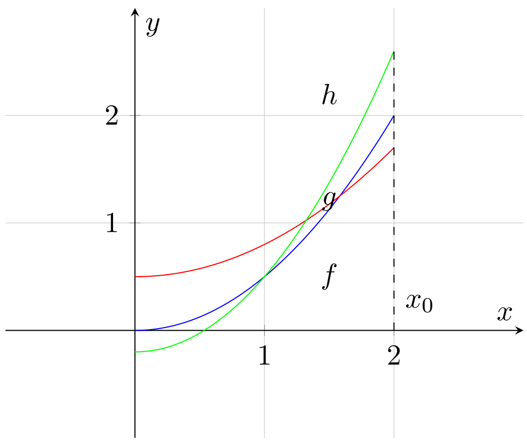
Proposition

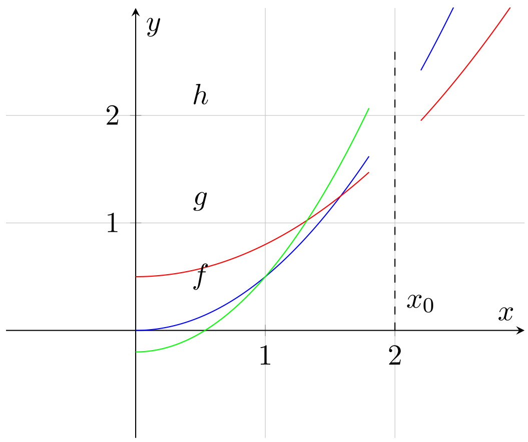
— Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.

— Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.

— Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} g = -\infty$, alors $\lim_{x_0} f = -\infty$.

— **Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)**
Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim_{x_0} g = \ell$.





1.3 Mini-exercices

1. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{x^2-x-2}{3x^2+2x+2}$ en 0. Et en $+\infty$?
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$. Et pour $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$?
3. En utilisant la définition de la limite (avec des ϵ), montrer que $\lim_{x\to 2}(3x+1) = 7$.
4. Montrer que si f admet une limite finie en x_0 alors il existe $\delta > 0$ tel que f soit bornée sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
5. Déterminer, si elle existe, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$. Et $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$?

2 Continuité en un point

2.1 Définition

Définition
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

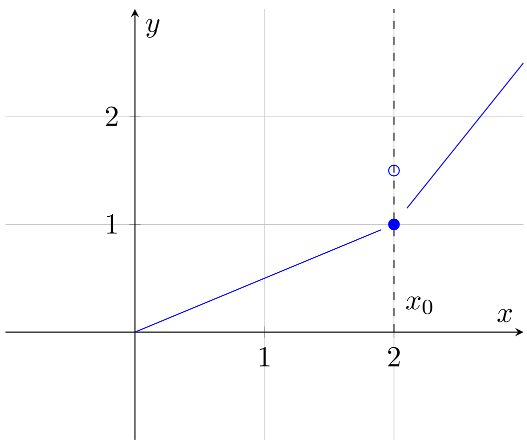
— On dit que f est **continue en un point** $x_0 \in I$ si

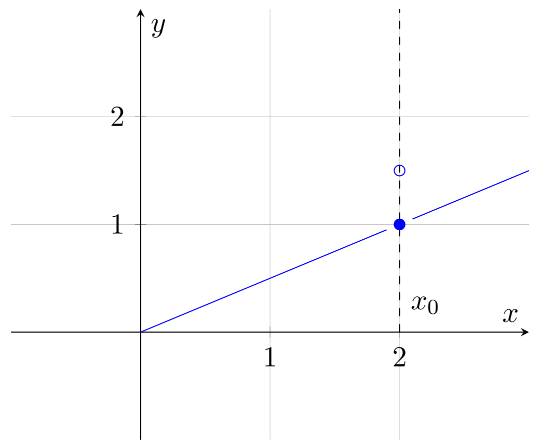
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

— On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative n'admet pas de saut, c'est-à-dire si l'on peut tracer son graphe "sans lever le crayon".
Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :





Exemples
Les fonctions suivantes sont continues :

— une fonction constante sur un intervalle,

— la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,

— les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$,

— la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,

— la fonction exp sur $\mathbb{R}$,

— la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

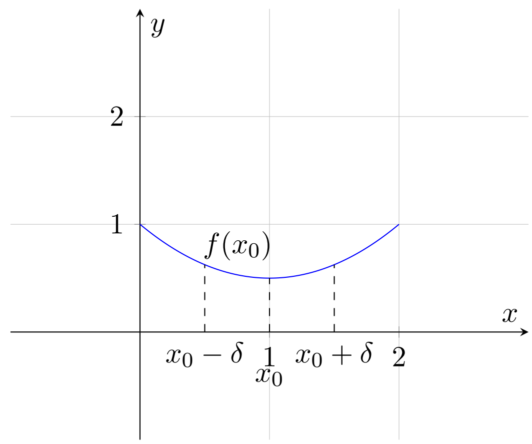
Par contre, la fonction partie entière E n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est continue en x_0.

2.2 Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale). Voici l'énoncé :

Lemme
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \neq 0$$



Démonstration
Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$, le cas $f(x_0) < 0$ se montrerait de la même manière.
Écrivons ainsi la définition de la continuité de f en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

Il suffit donc de choisir ϵ tel que $0 < \epsilon < f(x_0)$.
Il existe alors bien un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, on a $f(x) > 0$.

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires.
Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$.
Alors

- $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
- $f + g$ est continue en x_0,
- $f \times g$ est continue en x_0,
- si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

Exemple
La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Proposition
Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f est continue en
$x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0) \in J$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Exemple
La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

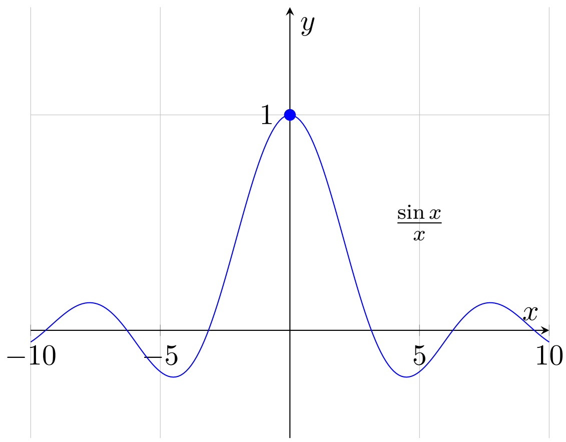
2.3 Prolongement par continuité

Définition
Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction, dont on suppose qu'elle admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0. Alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0. On l'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Exemple
Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On a vu que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
Donc en posant $\tilde{f}(0) = 1$, la fonction $\tilde{f}$ devient continue sur $\mathbb{R}$.



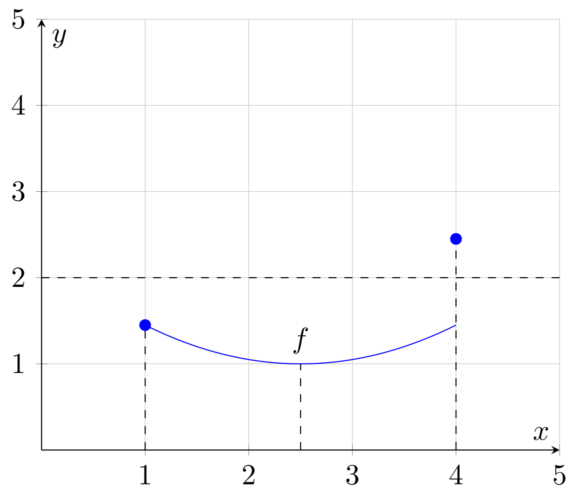
2.4 Mini-exercices

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Étudier la continuité de la fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ sur son domaine de définition.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est continue en 0.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f n'est pas continue en 0.

3 Fonctions continues sur un intervalle

3.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.



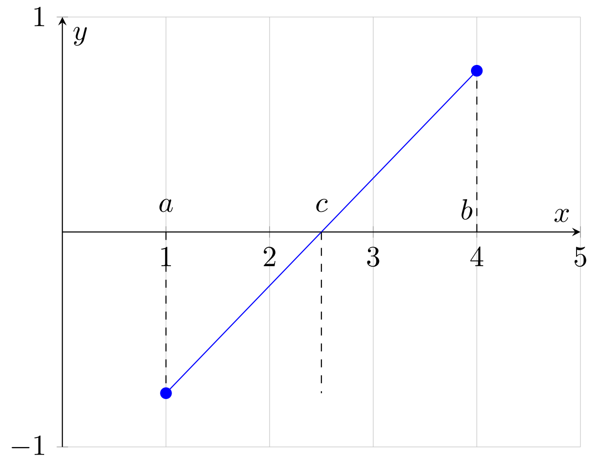
Démonstration (hors programme)
Supposons par exemple que $f(a) \leq y \leq f(b)$. On considère l'ensemble $E = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$. Cet ensemble est non vide (car $a \in E$) et majoré par b. Il admet donc une borne supérieure $c = \sup E$. Montrons que $f(c) = y$.
Supposons d'abord que $f(c) < y$. Alors, comme f est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$, on a $f(x) < y$. En particulier, pour $x = c + \delta/2$, on a $f(x) < y$, donc $x \in E$. Mais alors $x > c$, ce qui contredit le fait que c est un majorant de E.
Supposons ensuite que $f(c) > y$. Alors, comme f est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$, on a $f(x) > y$. En particulier, pour $x = c - \delta/2$, on a $f(x) > y$, donc $x \notin E$. Mais alors $c - \delta/2$ est un majorant de E, ce qui contredit le fait que c est le plus petit des majorants. On a donc nécessairement $f(c) = y$.

3.2 Applications du théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.
Soient $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Alors f prend toutes les valeurs intermédiaires entre m et M.

Démonstration
Soit $y \in [m, M]$. Il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$. Quitte à échanger x_1 et x_2, on peut supposer $x_1 \leq x_2$. Alors f est continue sur $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ et $y \in [m, M] = [f(x_1), f(x_2)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [x_1, x_2] \subset [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Corollaire - Théorème de Bolzano
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.



Exemple d'application : recherche de solutions d'équations.
On souhaite montrer que l'équation $x^3 + 1 = 3x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
Notons $f(x) = x^3 - 3x + 1$. f est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $c^3 + 1 = 3c$.

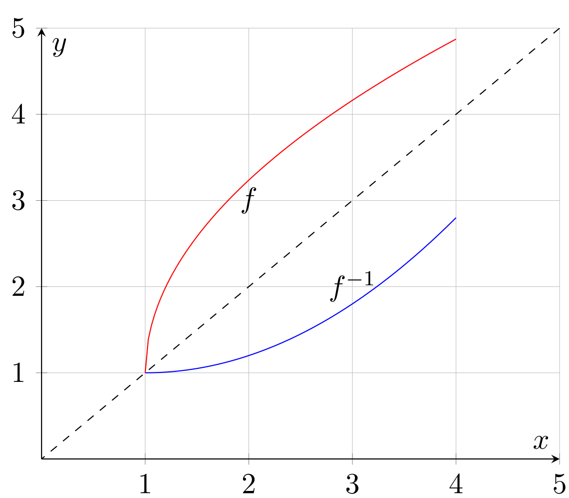
3.3 Fonctions continues et strictement monotones

Théorème
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors

— $f(I)$ est un intervalle,

— f réalise une bijection de I sur $f(I)$,

— la bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone (de même monotonie que f).

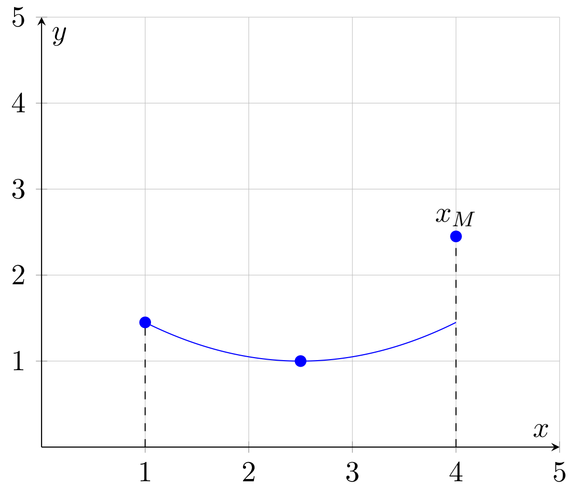


Exemple
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue et strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$. Elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction racine carrée $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$, qui est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3.4 Fonction continue sur un segment

Théorème
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que

$$f(x_m) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_M) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$



3.5 Uniforme continuité

Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

La différence avec la continuité simple est que le δ ne dépend pas du point x mais seulement de ϵ.

Proposition
Toute fonction uniformément continue est continue.

La réciproque est fausse en général, mais on a le théorème important suivant :

Théorème - Théorème de Heine
Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

3.6 Mini-exercices

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique ($T > 0$). Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.
3. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Montrer que f s'annule au moins une fois.
5. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est uniformément continue.

Fin de chapitre