CHAPITRE 06

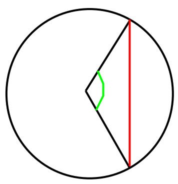
TRIGONOMETRIE

Objectif du chapitre :

⇒ Connaître et utiliser les relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux des côtés d'un triangle rectangle.

⇒ Déterminer, à l'aide de la calculatrice, des valeurs approchées :

- du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné;
- de l'angle aigu dont on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente.



Le mot vient du grec "trigone" (triangle) et "metron" (mesure).
On attribue à ***Hipparque de Nicée*** (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.
Le grec ***Claude Ptolémée*** (85 ; 165) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.
Plus tard, l'astronome et mathématicien ***Regiomontanus***, de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques.
Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme sinus.

I) Le cosinus

1) Activité

a) ABC est un triangle rectangle en B.
Calculer $\frac{AB}{AC}$.

b) Calculer ce rapport dans d'autres triangles rectangles en prolongeant [AB] et [AC].
Que remarque-t-on ?

Ces rapports s'appellent le cosinus de l'angle Â, se notent $\cos(\hat{A})$ et ne dépendent que de Â.

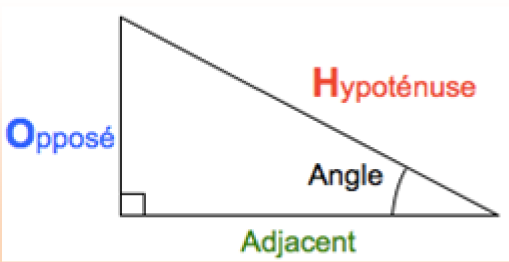
c) Retrouvons la mesure de l'angle Â à l'aide de la calculatrice:

Taper : $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{\text{COS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$

Ton résultat :

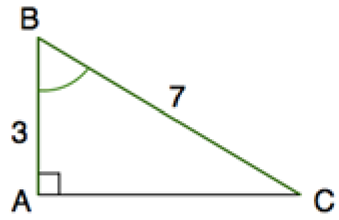
2) Formule

$$\cos(Angle) = \frac{Adjacent}{Hypoténuse}$$



3) Application

a) Calcul de la mesure d'un angle - Exemple



Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au dixième de degré près.

Réponse

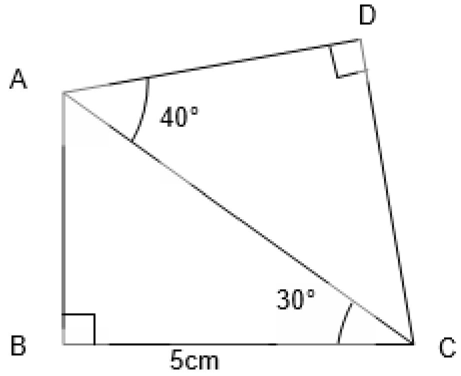
Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{BA}{BC}$

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{3}{7}$

$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$

$\boxed{\widehat{ABC} \approx 64{,}6°}$



b) Calculer une longueur – Exemple

1) Calculer AC.
2) En déduire AD.

Arrondir les longueurs au centième de centimètre.

1) Dans le triangle ABC rectangle en B,

$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{CB}{CA}$

$\cos(30°) = \frac{5}{CA}$

$\frac{\cos(30°)}{1} = \frac{5}{CA}$

$CA = 5 \times 1 \div \cos(30°)$ (produit en croix)

$\boxed{CA \approx 5{,}77\ cm}$

2) Dans le triangle ADC rectangle en D,

$\cos(\widehat{DAC}) = \frac{AD}{CA}$

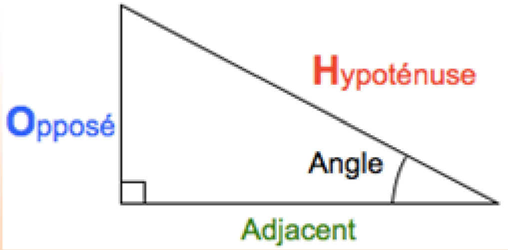
$\cos(40°) = \frac{AD}{\frac{5}{\cos(30°)}} \approx \frac{AD}{5{,}77}$

$\boxed{AD \approx 4{,}42\ cm}$

II) Cosinus, Sinus, Tangente

1) Formule de trigonométrie dans un triangle rectangle

$$\cos(Angle) = \frac{Adjacent}{Hypoténuse}$$
$$\sin(Angle) = \frac{Opposé}{Hypoténuse}$$
$$\tan(Angle) = \frac{Opposé}{Adjacent}$$



P’tit astuce pour retenir plus facilement ces trois formules :

$\boldsymbol{Cosinus} = Adjacent \div \boldsymbol{H}ypoténuse \rightarrow \boldsymbol{CAH}$

$\boldsymbol{Sinus} = \boldsymbol{O}pposé \div \boldsymbol{H}ypoténuse \rightarrow \boldsymbol{SOH}$

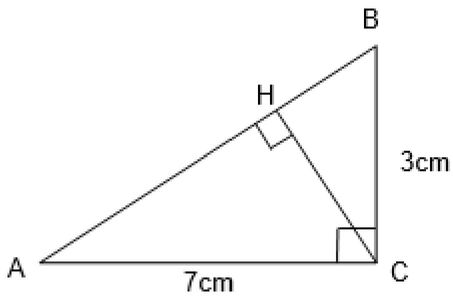
$\boldsymbol{Tangente} = \boldsymbol{O}pposé \div \boldsymbol{A}djacent \rightarrow \boldsymbol{TOA}$

2) Application

a) Calcul la mesure d’angles - Exemple

Calculer la mesure au degré près de l’angle $\widehat{BAC}$.

Réponse :



Dans le triangle BAC rectangle en C, on a :
$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{AC}$
$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{3}{7}$ (par soucis de précision il est conseillé de conserver et d’utiliser la valeur exacte)
$\widehat{BAC} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 23°$
$\boxed{\widehat{BAC} \approx 23°}$

b) Calculer une longueur – Exemple

Suite l’exemple précédent :
Calculer la longueur HC arrondie au dixième de centimètre.

Dans le triangle AHC rectangle en H, on a :
$\sin(\widehat{HAC}) = \frac{HC}{AC}$
On sait déjà que $\widehat{BAC} \approx 23°$ or $\widehat{HAC} = \widehat{BAC}$
Donc : $\sin(23°) \approx \frac{HC}{7}$
$HC \approx 7 \times \sin(23°)$
$\boxed{HC \approx 2{,}7\ cm}$