# Chapitre 06 – NOMBRE DÉRIVÉ

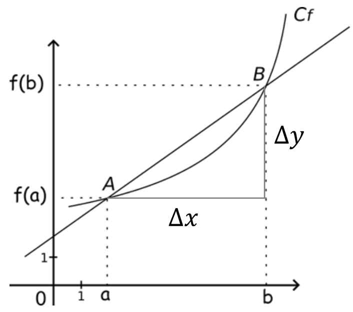
## 1) TAUX DE VARIATION D'UNE FONCTION ENTRE DEUX RÉELS

Définition :

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}$

Soient $a$ et $b$ deux réels distincts de $\mathrm{I}$.

Le **taux de variation** (ou **taux d'accroissement**) de $\boldsymbol{f}$ **entre** $\boldsymbol{a}$ **et** $\boldsymbol{b}$ le nombre réel égal à : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$




**Graphiquement** : la droite (AB) sécante à la courbe $C_f$ a pour **coefficient directeur** (ou **pente**) le taux de variation $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

En effet, on a : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

**Exemple 1 : Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)=mx+p}$.**

Exprimer le taux de variation de $f$ entre $a$ et $b$ deux réels distincts

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{mb+p-(ma+p))}{b-a}=\frac{mb+p-ma-p}{b-a}=\frac{m(b-a)}{b-a}=m$$

**Exemple 2 : soit $\boldsymbol{f}$ la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)=x^2}$.**

**a)** Calculer le taux de variation de $f$ entre 1 et 3 : $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=\frac{8}{2}=4$

**b)** Calculer le taux de variation de $f$ entre $-2$ et $-1$ : $\frac{f(-2)-f(-1)}{-2-(-1)}=\frac{4-1}{-2+1}=\frac{3}{-1}=-3$

Propriété

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}$, et $a$ et $b$ deux réels distincts de $\mathrm{I}$.

- Si $f$ est **croissante** sur $\mathrm{I}$, alors le taux de variation de $f$ entre $a$ et $b$ est **positif**
- Si $f$ est **décroissante** sur $\mathrm{I}$, alors le taux de variation de $f$ entre $a$ et $b$ est **négatif**.

**Remarque** : les réciproques des propriétés précédentes sont fausses.

Contre-exemple : avec $f$ la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$

Calculer le taux de variation de $f$ entre $-1$ et 2 : $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{4-1}{2+1}=\frac{3}{3}=1$

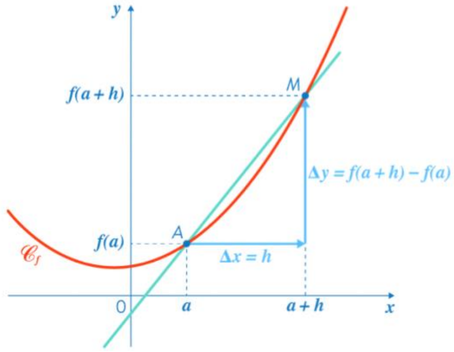
Ce taux de variation est positif or la fonction $f$ n'est pas croissante sur $[-1;2]$.

## 2) NOMBRE DÉRIVÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

Définition :

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}$

Soient $a$ un réel de $\mathrm{I}$ et $h$ un réel non nul tel que $a+h \in \mathrm{I}$ .




On dit que $\boldsymbol{f}$ **est dérivable en** $\boldsymbol{a}$ lorsque le taux de variation de $f$ entre $a$ et $a+h$ tend vers un unique nombre réel lorsque $h$ tend vers 0.

Ce nombre limite est appelé **nombre dérivé de** $\boldsymbol{f}$ **en** $\boldsymbol{a}$,

et on le note $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$.

On écrit : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Exemples : **a) Soit $f$ la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer $f'(4)$.**

Le taux de variation de $f$ entre $4$ et $4+h$ est :

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{4+h-4} = \frac{(4+h)^2-4^2}{h} = \frac{16+8h+h^2-16}{h} = \frac{h(h+8)}{h} = 8+h$$

Lorsque $h$ tend vers 0, le taux de variation $(8+h)$ tend vers 8.

Ainsi : $\lim\limits_{h\to 0}(8+h) = 8$

Cette limite est finie alors la fonction carré est dérivable en 4 et le nombre dérivé de $f$ en $4$ est 8, on note $f'(4) = 8$.

**b) Soit $g$ la fonction inverse définie sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer $g'(2)$.**

Le taux de variation de $g$ entre $2$ et $2+h$ est :

$$\frac{g(2+h)-g(2)}{2+h-2} = \frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h} = \frac{-h}{2h(2+h)} = \frac{-1}{2(2+h)} = \frac{-1}{4+2h}$$

Lorsque $h$ tend vers 0, le taux de variation $\left(\frac{-1}{4+2h}\right)$ tend vers $\frac{-1}{4}$.

Ainsi : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{-1}{4+2h}\right) = \frac{-1}{4}$

Cette limite est finie alors la fonction inverse est dérivable en 2 et le nombre dérivé de $g$ en 2 est $\frac{-1}{4}$, on note $g'(2) = \frac{-1}{4}$.

Remarques :

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se lit « limite, lorsque $h$ tend vers 0, de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ »
- une fonction peut ne pas être dérivable en un réel $a$, par exemple, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

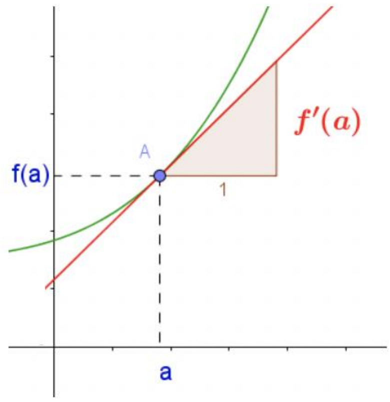
## 3) TANGENTE À UNE COURBE EN UN POINT

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I, et soient $a$ un réel de I et $h$ un réel non nul tel que $a + h \in \mathrm{I}$.
Soit A le point de la courbe représentative de $f$ d'abscisse $a$
Soit M le point de la courbe représentative de $f$ d'abscisse $a + h$.

Lorsque $h$ tend vers 0, le point M se rapproche du point A et la sécante (AM) de coefficient directeur $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'une position limite.

Si $f$ est dérivable en $a$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ lorsque $h$ tend vers 0.

On admet alors que ce nombre dérivé est le coefficient directeur de la droite, qui correspond à la position limite (AM).




<u>Définition</u>

Soient $f$ une fonction dérivable en un réel $a$ et A le point de coordonnées $A(a; f(a))$.

La **tangente à la courbe** représentative de $f$ au point d'abscisse $a$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

<u>Propriété</u>

L'équation réduite de la **tangente à la courbe** représentative de $f$ au point d'abscisse $A(a; f(a))$ est :
$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

<u>Démonstration :</u>

on écrit l'équation réduite $y = mx + p$ de la tangente qui a pour coefficient directeur $f'(a) = m$

Alors l'équation réduite s'écrit : $y = f'(a) \times x + p$

Cette tangente passe par le point $A(a; f(a))$ alors les coordonnées du point A vérifient l'équation réduite :

$f(a) = f'(a) \times a + p \iff p = f(a) - f'(a) \times a$

Finalement l'équation réduite est : $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a$

Donc : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$

**<u>Exemple :</u> Soit $f$ la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.**

**Déterminer l'équation de la tangente (T) à la parabole au point d'abscisse 4.**

L'équation de (T) est de la forme : $y = f'(4) \times (x - 4) + f(4)$

D'après l'exemple a) de la partie 2), on sait que $f'(4) = 8$ et calculons : $f(4) = 4^2 = 16$

On obtient : $y = 8(x - 4) + 16$

$\iff y = 8x - 32 + 16$

$\iff y = 8x - 16$

**<u>Cas particulier :</u>**

lorsque le **nombre dérivé** d'une fonction $f$ est **nul** en un réel $a$, alors la **tangente** à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $a$ est parallèle à l'axe des abscisses, on dit alors que la tangente est **horizontale**. L'équation réduite de la tangente est alors $y = f'(a)$.